

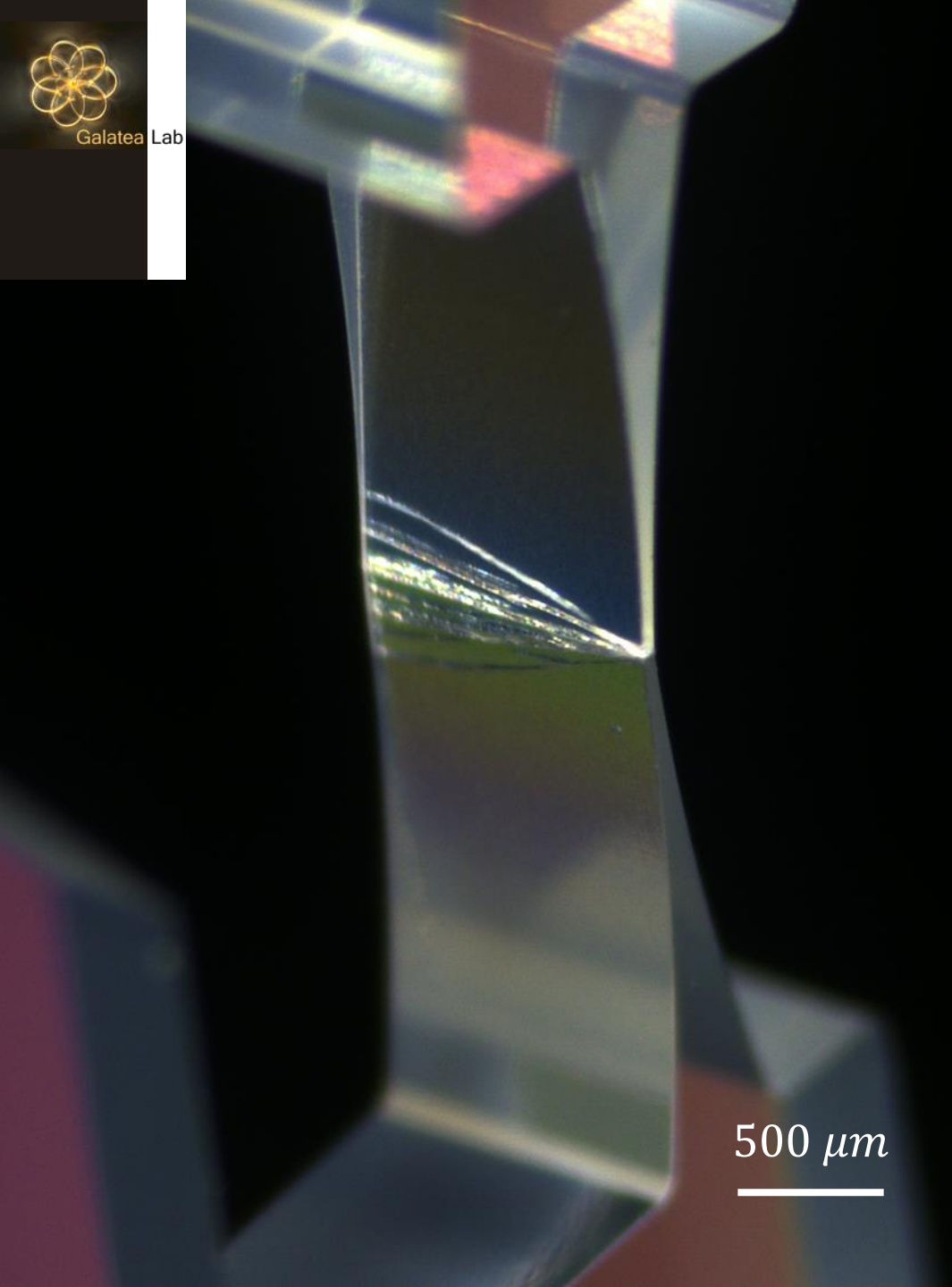
MATH-111(d)
Algèbre linéaire (pour MT)

Application à la mécanique des guidages flexibles

19 décembre 2024

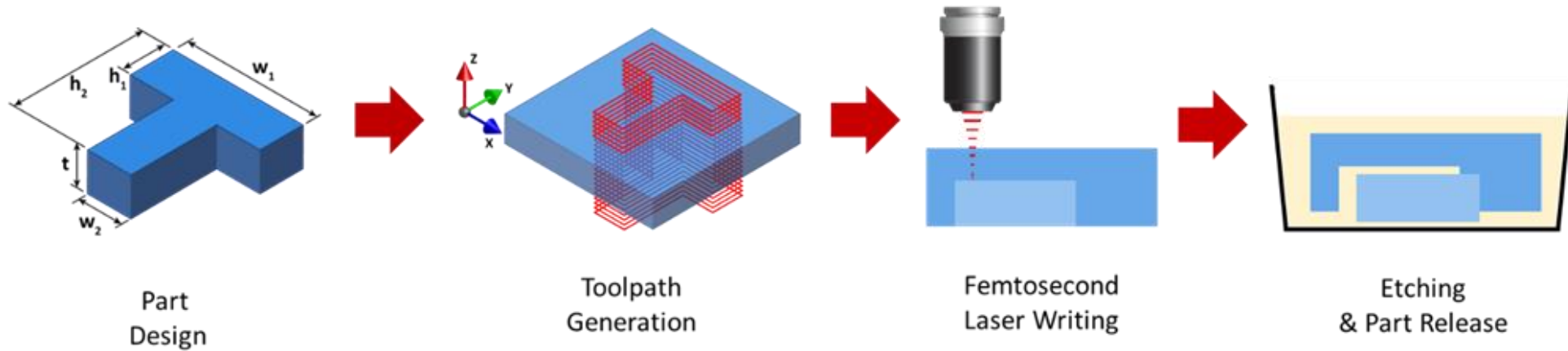
Antoine DURET

500 μm

A microscopic image showing a complex, multi-layered structure of a flexible guide. The structure is composed of several thin, overlapping layers that form a central channel. The layers are colored in shades of blue, green, and yellow, indicating different materials or coatings. The structure is shown in a perspective view, highlighting its three-dimensional nature. A scale bar at the bottom right indicates a length of 500 μm .

Fabrication 3D de micromécanismes en verre à l'aide de lasers femtoseconde

- Pièces monolithiques
- Dimensions extrêmement fines (lames de $30\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur)
- Guidages flexibles

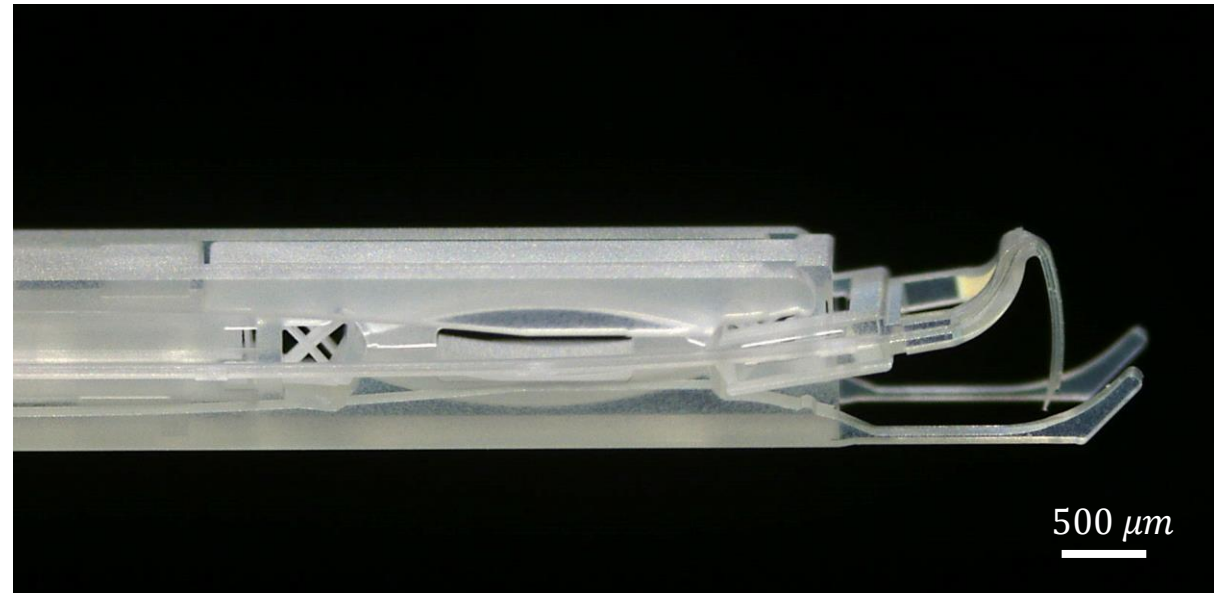
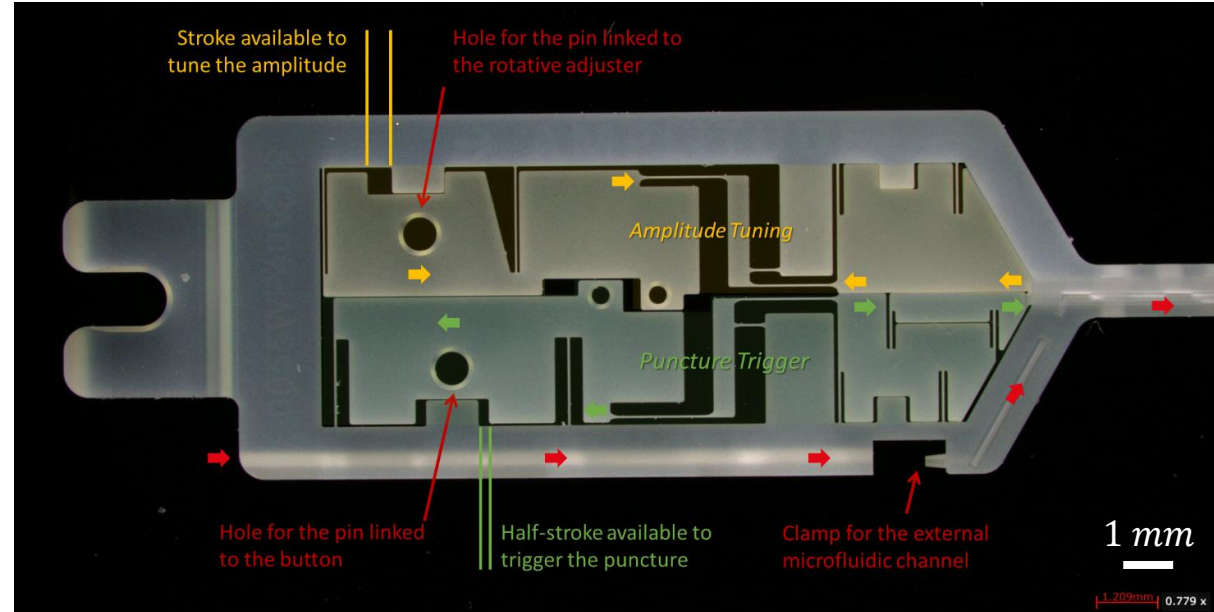
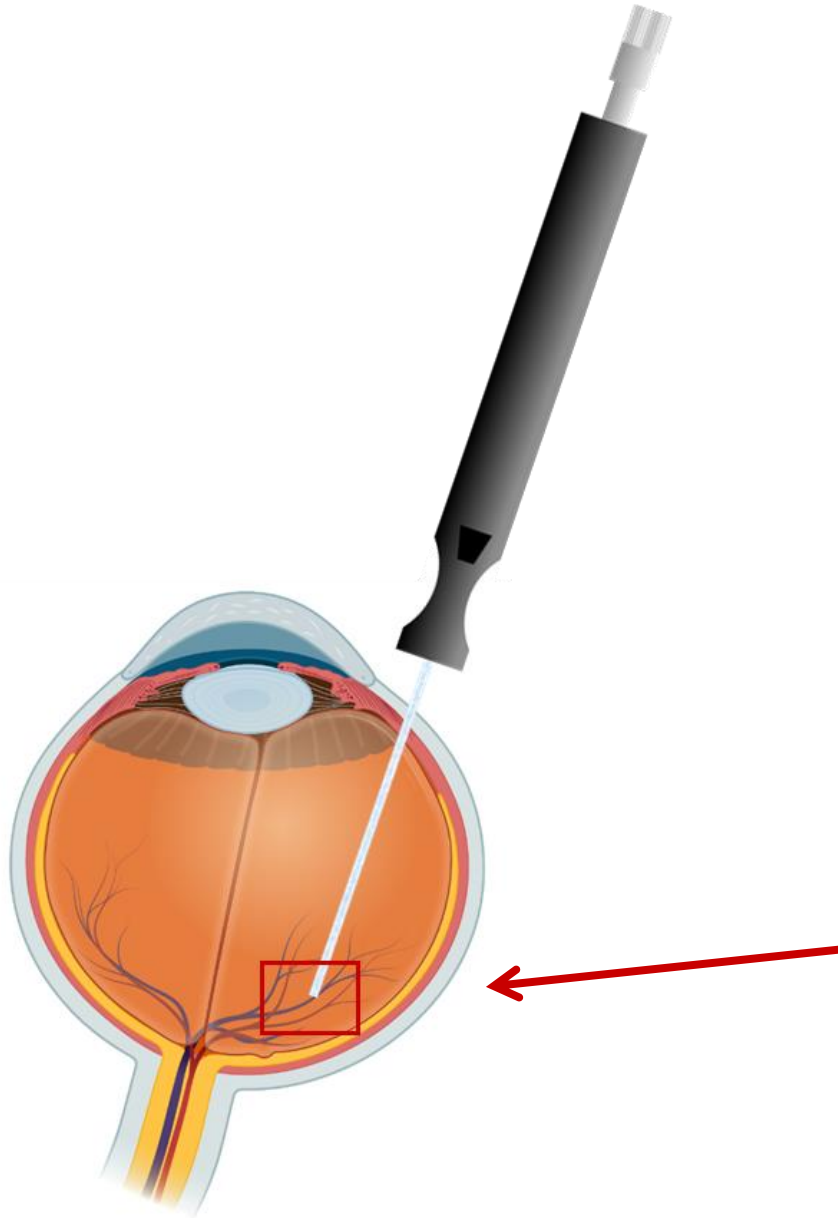


Exemples d'applications

- Technologies biomédicales (outils de chirurgie)
- Télécommunications (connecteurs optiques)
- Pièces horlogères

Exemple: outil de chirurgie pour la rétine

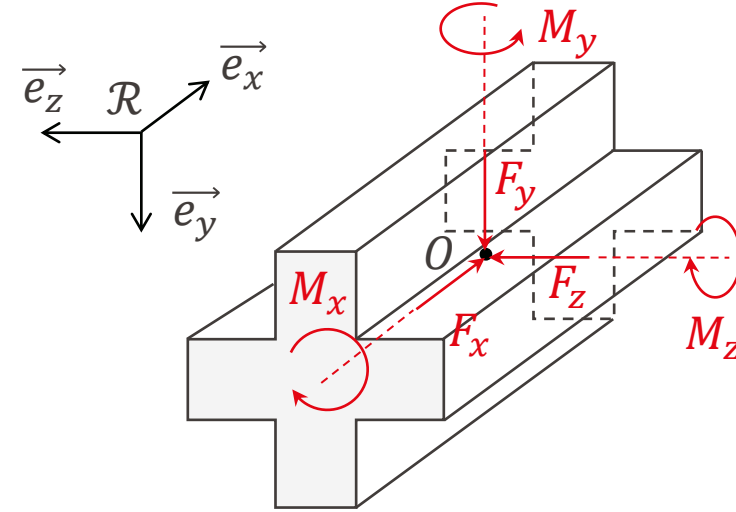
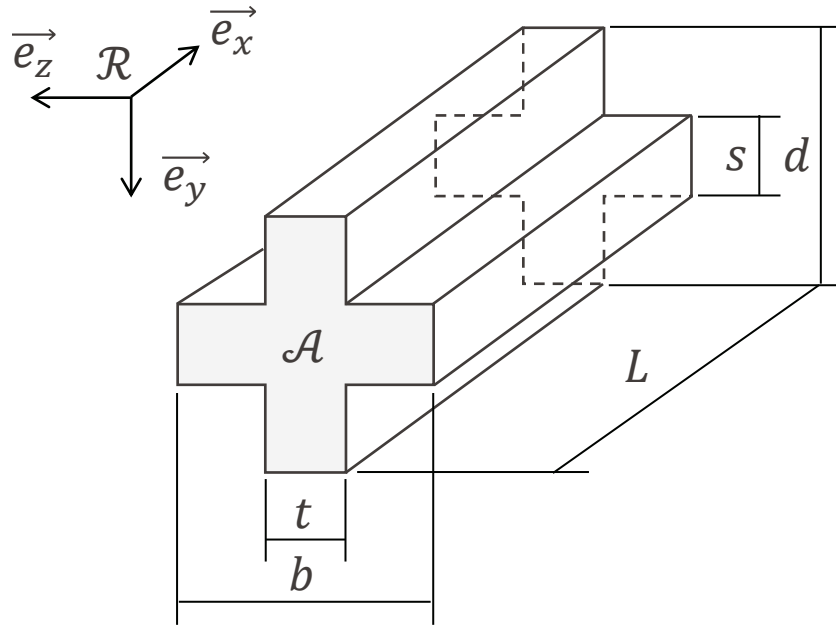
■ MATH-111(d)





Objectif: calcul de la rigidité
d'un mécanisme flexible

Exemple: pivot cruciforme



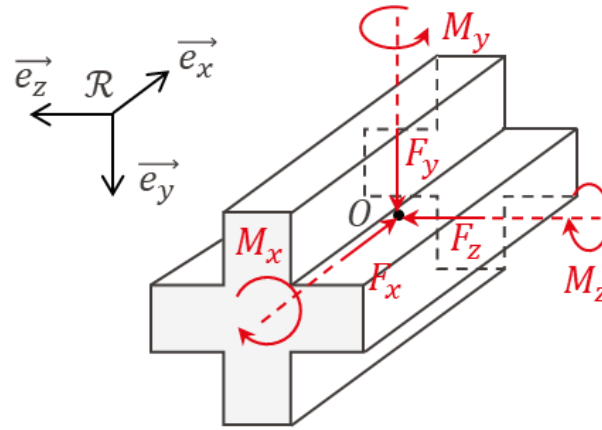
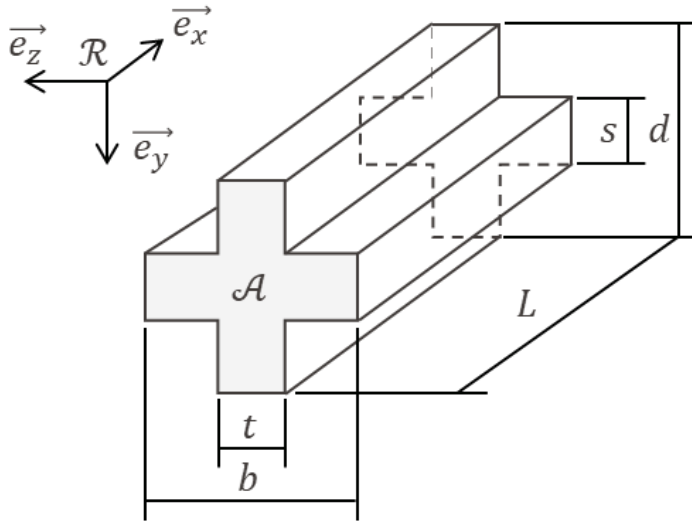
$$(\hat{\mathbf{F}}^P)_{\mathcal{R}} = (\mathbf{K}^P)_{\mathcal{R}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}^P)_{\mathcal{R}}$$

wrench général des charges
(forces et moments)

matrice de rigidité

twist général des déplacements
(linéaires et angulaires)

Rigidités linéaires et angulaires



$$\mathcal{A} = d \cdot t + s \cdot (b - t)$$

$$I_y = \frac{sb^3 + t^3(d - s)}{12}$$

$$I_x = I_y + I_z$$

$$I_z = \frac{td^3 + s^3(b - t)}{12}$$

$$k_{F_x, r_x} = \frac{F_x}{r_x} = \frac{\mathcal{A}E}{L}$$

$$k_{F_y, r_y} = \frac{F_y}{r_y} \cong \frac{12EI_z}{L^3}$$

$$k_{F_z, r_z} = \frac{F_z}{r_z} \cong \frac{12EI_y}{L^3}$$

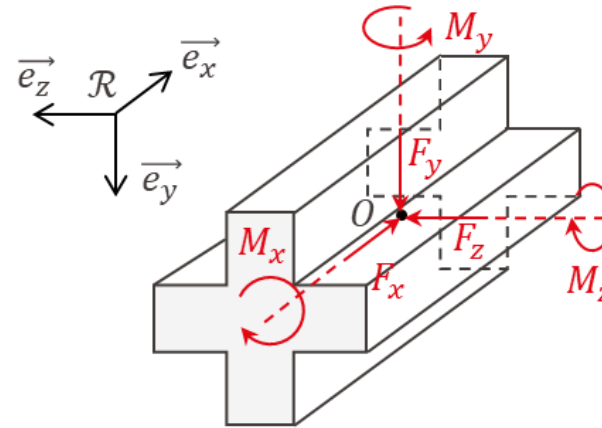
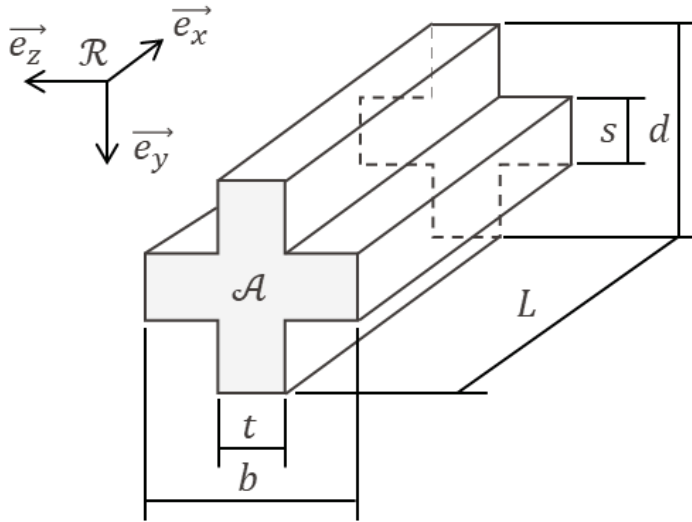
(torsion)

$$k_{M_x, \theta_x} = \frac{M_x}{\theta_x} = \frac{GI_x}{L}$$

$$k_{M_y, \theta_y} = \frac{M_y}{\theta_y} \cong \frac{EI_y}{L}$$

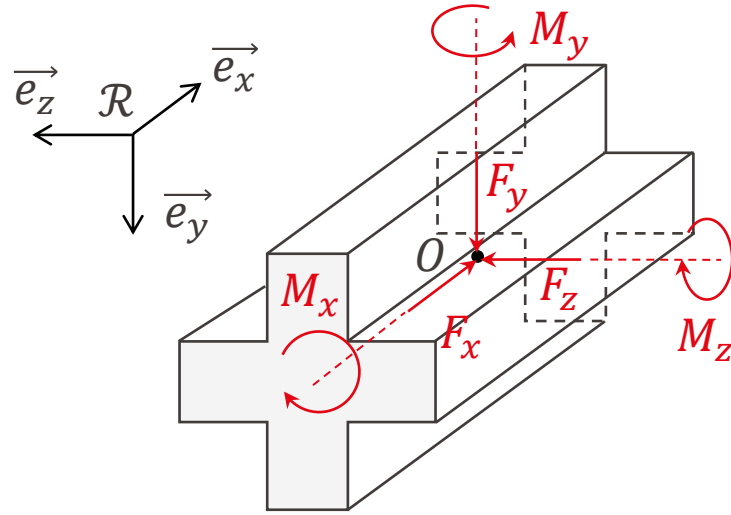
$$k_{M_z, \theta_z} = \frac{M_z}{\theta_z} \cong \frac{EI_z}{L}$$

Matrice de rigidité au centre de masse

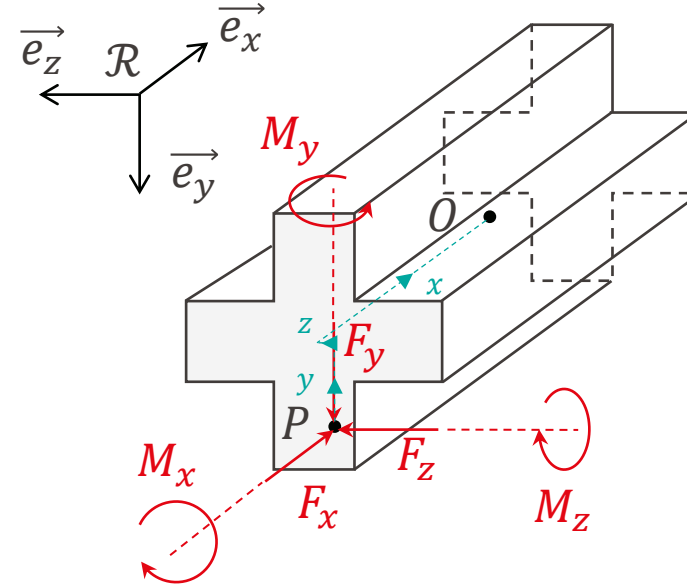


$$(\mathbf{K}^0)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t) + sb^3 + t^3(d-s))G}{12L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(sb^3 + t^3(d-s))E}{12L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t))E}{12L} \\ \frac{(d \cdot t + s \cdot (b-t))E}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t))E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(sb^3 + t^3(d-s))E}{L^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité en un point arbitraire



Centre de masse



Point arbitraire

- Translation dans l'espace
- Il est aussi possible d'effectuer des rotations...

Méthode: transformation adjointe

But: transporter la matrice de rigidité du point O dans le repère de coordonnées local $\mathcal{R}_i$ au point P dans le repère de coordonnées global $\mathcal{R}$

Outil: la **transformation adjointe**, une représentation particulière tirée de l'algèbre de Lie du groupe « mouvements des corps rigides »

$$(K^P)_{\mathcal{R}} = (T^{O \leftarrow P})^T (K^O)_{\mathcal{R}_i} (T^{O \leftarrow P}) \quad \leftarrow \text{(matrice de transformation adjointe)}$$

$$(T^{O \leftarrow P})^{-1} = (T^{O \leftarrow P})^T = (T^{P \leftarrow O}) = \begin{pmatrix} R(\phi) & 0 \\ \mathbf{PO} \times & R(\phi) \end{pmatrix}$$

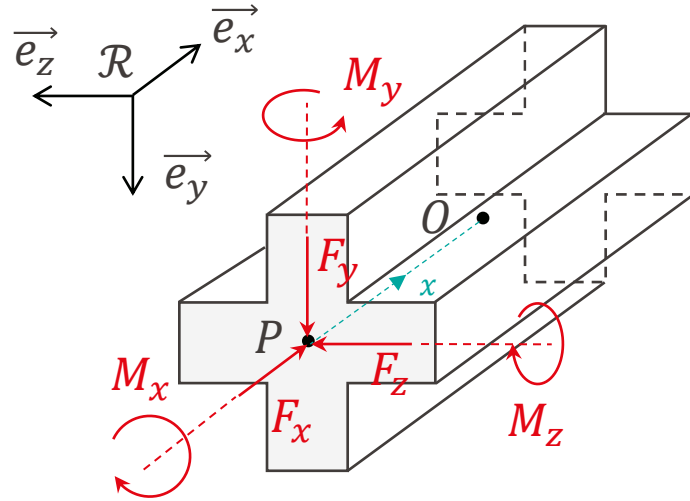
Matrice de rotation de $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}$,
(autour de l'axe z par exemple)

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur contenant les
composantes du vecteur $\mathbf{PO}$

$$\mathbf{PO} \times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple: matrice de rigidité en un point arbitraire



- **PO**: translation dans l'espace de $x = L/2$ selon $\vec{e}_x$

$$\mathbf{PO} \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L/2 \\ 0 & L/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pas de rotation

$$(T^{P \leftarrow O}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ \mathbf{PO} \times & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

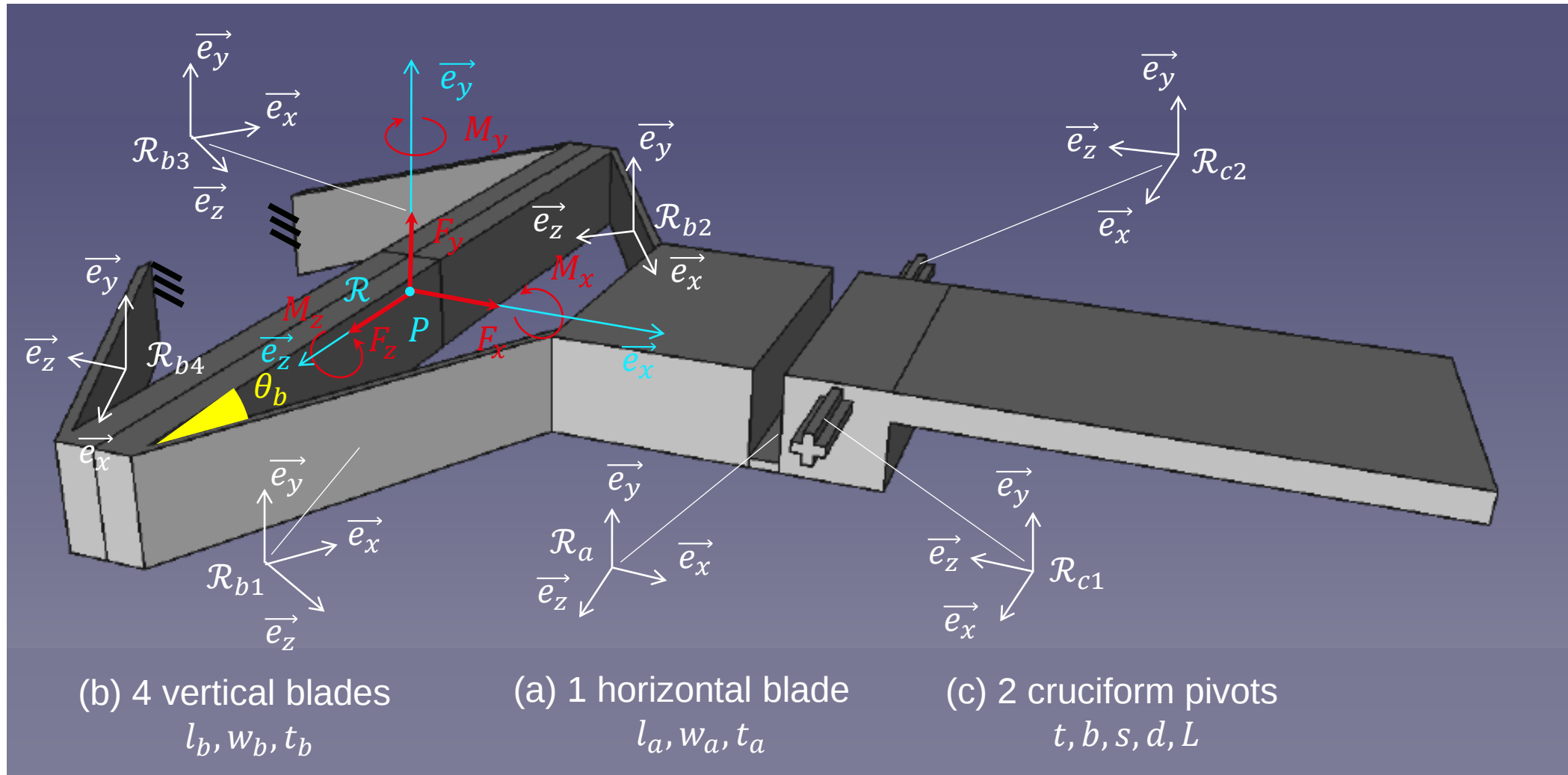
La matrice de rigidité exprimée à l'extrémité de la poutre devient:

$$(\mathbf{K}^P)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t) + sb^3 + t^3(d-s))G}{12L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_2}{12L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{12L} \\ \frac{(d \cdot t + s \cdot (b-t))E}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{24} - \frac{\sigma_1}{2L^2} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_2}{L^3} & 0 & \frac{\sigma_2}{2L^2} - \frac{\sigma_2}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

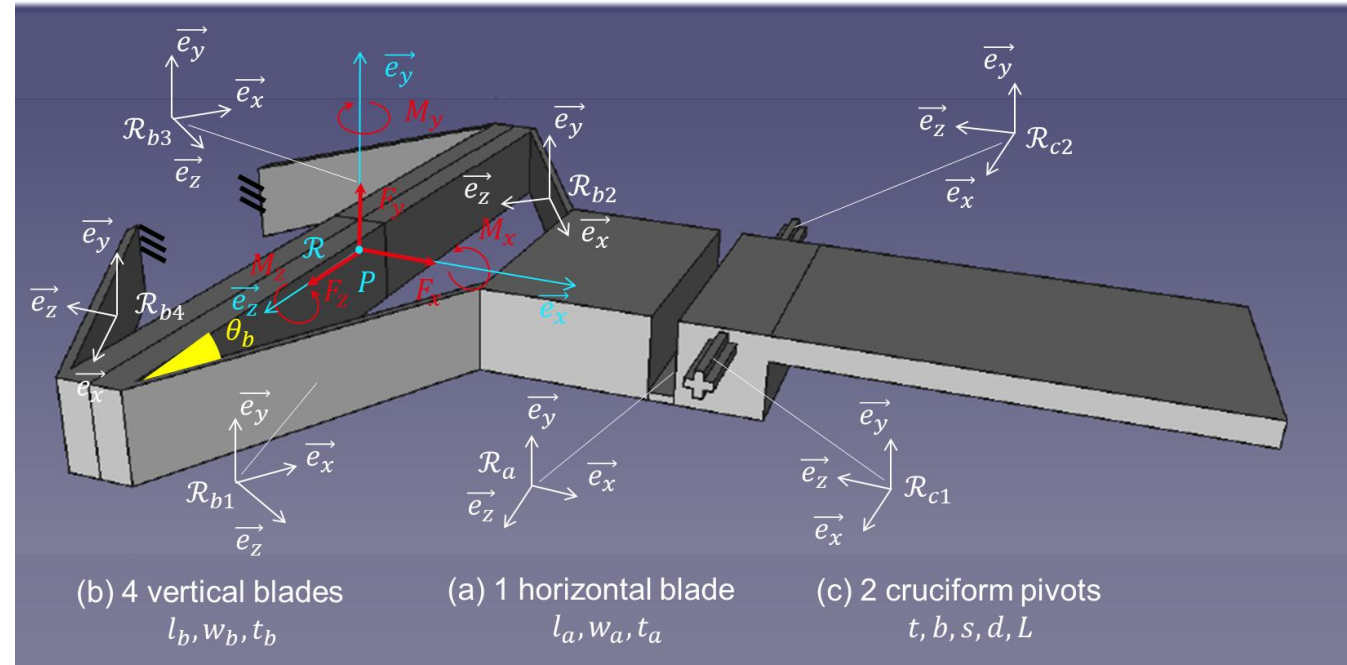
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (td^3 + s^3(b-t))E \\ \sigma_2 &= (sb^3 + t^3(d-s))E \end{aligned}$$



Que se passe-t-il pour un
mécanisme plus complexe?



Principe de superposition



La matrice de superposition globale est donnée par

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{K}_{tot}^P)_{\mathcal{R}} \\
 &= \left(\left[(\mathbf{T}_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{a/0}^O)_{\mathcal{R}_a} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T \right]^{-1} \right. \\
 &+ \left[(\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b1} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{b1/1}^O)_{\mathcal{R}_{b1}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b1} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T + (\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b2} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{b2/1}^O)_{\mathcal{R}_{b2}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b2} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T + (\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b3} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{b3/2}^O)_{\mathcal{R}_{b3}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b3} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T \right. \\
 &\left. \left. + (\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b4} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{b4/2}^O)_{\mathcal{R}_{b4}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{b4} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T \right]^{-1} + \left[(\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{c1} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{c1/0}^O)_{\mathcal{R}_{c1}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{c1} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T + (\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{c2} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) (\mathbf{K}_{c2/0}^O)_{\mathcal{R}_{c2}} \left((\mathbf{T}_{\mathcal{R}_{c2} \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) \right)^T \right]^{-1} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

où les rigidités des éléments en parallèle peuvent être sommées, et les compliances des éléments en série peuvent être sommées (à l'inverse des résistances en électronique).

(a) Lame horizontale

$$(\mathbf{K}_{a/0}^O)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{xa}}{l_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{ya}}{l_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{za}}{l_a} \\ \frac{t_a w_a E}{l_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{za}}{l_a^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{ya}}{l_a^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{xa} = I_{ya} + I_{za}, \quad I_{ya} = \frac{t_a w_a^3}{12}, \quad I_{za} = \frac{t_a^3 w_a}{12}$$

$$(T_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}}^{P \leftarrow O}) = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ \mathbf{PO} \times & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_a \\ y = y_a \\ z = z_a = 0 \end{cases} \quad \mathbf{PO} \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_a \\ 0 & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Lames verticales

$$(\mathbf{K}_{bi/j}^O)_{\mathcal{R}_{bi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{xb}}{l_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{yb}}{l_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{zb}}{l_b} \\ \frac{t_b w_b E}{l_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zb}}{l_b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yb}}{l_b^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T_{\mathcal{R}_{b1}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_1}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_1 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = \theta_b - \frac{\pi}{2}$$

$$(T_{\mathcal{R}_{b2}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_2}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_2 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_b$$

$$(T_{\mathcal{R}_{b3}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_3}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_3 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = \theta_b - \frac{\pi}{2}$$

$$(T_{\mathcal{R}_{b4}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_4}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_4 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_b$$

$$I_{xb} = I_{yb} + I_{zb}, \quad I_{yb} = \frac{t_b^3 w_b}{12}, \quad I_{zb} = \frac{t_b w_b^3}{12}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_{b12} \\ y = y_b \\ z = z_{b14} \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_1 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_{b14} & y_b \\ z_{b14} & 0 & -x_{b12} \\ -y_b & x_{b12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_{b12} \\ y = y_b \\ z = z_{b23} \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_2 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_{b23} & y_b \\ z_{b23} & 0 & -x_{b12} \\ -y_b & x_{b12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_{b34} \\ y = y_b \\ z = z_{b23} \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_3 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_{b23} & y_b \\ z_{b23} & 0 & -x_{b34} \\ -y_b & x_{b34} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_{b34} \\ y = y_b \\ z = z_{b14} \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_4 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_{b14} & y_b \\ z_{b14} & 0 & -x_{b34} \\ -y_b & x_{b34} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Pivots cruciformes

$$(K_{ci/0}^O)_{\mathcal{R}_{ci}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t) + sb^3 + t^3(d-s))G}{12L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(sb^3 + t^3(d-s))E}{12L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t))E}{12L} \\ \frac{(d \cdot t + s \cdot (b-t))E}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(td^3 + s^3(b-t))E}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(sb^3 + t^3(d-s))E}{L^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$(T_{\mathcal{R}_{c1}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_1}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_1 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$(T_{\mathcal{R}_{c2}\mathcal{R}}^{P \leftarrow O_2}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathbf{PO}_2 \times & R \end{pmatrix}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = x_{c1} \\ y = y_c \\ z = z_c \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_1 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_{c1} \\ -y_c & x_{c1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_{c2} \\ y = y_c \\ z = z_c \end{cases}$$

$$\mathbf{PO}_2 \times = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_{c2} \\ -y_c & x_{c2} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité globale

La matrice de rigidité globale est extrêmement compliquée sous sa forme littérale. A l'aide d'outils numériques tels que Matlab, il est néanmoins possible d'effectuer une application numérique.



Attention: les unités des coefficients de cette matrice ne sont pas les mêmes selon le bloc considéré!

- En $[N.m/rad]$ pour le bloc 3×3 supérieur gauche
- En $[N.m/m]$ pour le bloc 3×3 supérieur droit
- En $[N/rad]$ pour le bloc 3×3 inférieur gauche
- En $[N/m]$ pour le bloc 3×3 inférieur droit

En utilisant une gamme de paramètres dans le modèle, nous trouvons par exemple pour les valeurs de $(\mathbf{K}_{tot}^P)_{\mathcal{R}}$:

3.321e+03	8.394e+06	-3.395e+04	2.972e+08	8.396e+03	1.416e+04
1.678e+08	-3.392e+01	-4.075e+06	9.298e+03	4.031e+08	-6.720e+06
6.315e+05	8.258e+03	-1.734e+05	-3.601e+04	1.715e+07	2.572e+09
2.768e+07	-7.723e+01	6.670e+05	-1.157e+03	-6.597e+07	1.017e+05
-2.811e+02	4.843e+06	2.437e+03	-2.135e+07	-4.341e+02	8.258e+03
-1.696e+06	-9.561e+02	1.701e+07	-3.396e+04	-4.075e+06	6.794e+04

A présent, en écrivant au laser femtoseconde dans la région où se trouve P , nous supposons qu'un déplacement de $z = 1.5 \mu m$ est induit. Le *twist* associé s'écrit

$$(\hat{\mathbf{r}}^P)_{\mathcal{R}} = (0, 0, 0, 0, 0, 1.5 \cdot 10^{-6})$$

et nous pouvons calculer les moments et forces induits à l'aide du *wrench*:

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{F}}^P)_{\mathcal{R}} &= (\mathbf{K}_{tot}^P)_{\mathcal{R}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}^P)_{\mathcal{R}} \\
 &= (-2.545e + 00, -1.434e - 03, 2.551e + 01, -5.095e - 02, -6.113e + 00, 1.019e - 01)
 \end{aligned}$$



$M_x, M_y \text{ \& } M_z \text{ en [N} \cdot \text{m]}$



$F_x, F_y \text{ \& } F_z \text{ en [N]}$



Joyeuses fêtes
et bonnes révisions!